20/05/16

Παρατήρηση: $\bar{\varphi}: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό (π.χ. $U = \mathbb{R}^2$) μπορεί να περιγραφεί ως $\bar{\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$(u,v) \in K \subset U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow$

$$\varphi \in C^1 \Rightarrow D\bar{\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}(u,v) = \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial v} \right)(u,v) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u}(u,v) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial v}(u,v)$$

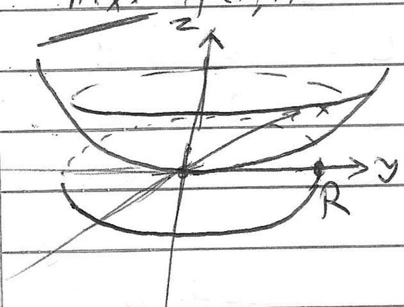
π.χ. 1: Έστω $\bar{\varphi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $(x,y) \in K \in \mathbb{R}^2$

$S = \{ (x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in K \} = \Gamma_f$: γράφημα της $f: K \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D\bar{\varphi}(x,y) = \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}(x,y) \right)$$: έχει βαθμίδα 2.

π.χ. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Έστω $K = \bar{B}((0,0),R) \subset \mathbb{R}^2$



Τότε $\bar{\varphi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}$$

π.χ. 2: $$\bar{\varphi}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

Η εικόνα του $\bar{\varphi}(\mathbb{R}^2) = \{ \bar{\varphi}(\lambda,\mu) : (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \}$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}$ ΓΑ, $D\bar{\varphi}(\lambda,\mu) = (\bar{a}, \bar{b})$

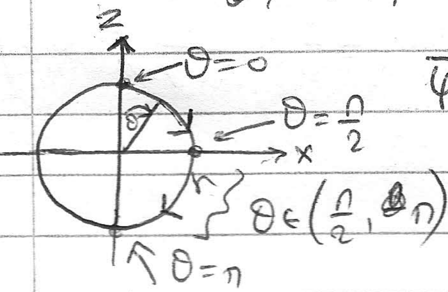
Αν $\bar{a}, \bar{b}$ ΓΑ $\Rightarrow$ rank $D\bar{\varphi}(\lambda,\mu) = 2$.

Πχ③ : $S' = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2\}$, $r>0$

Η S' μπορεί να παραμετρικοποιηθεί μέσω σφαιρικών συν/νων.

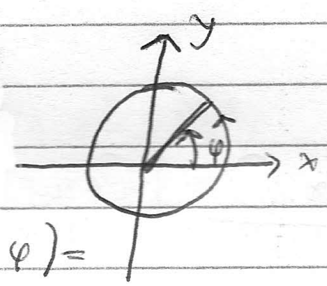
$$\bar\Phi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x(\theta,\varphi)\\ y(\theta,\varphi)\\ z(\theta,\varphi)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}, \quad (\theta,\varphi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

Στο O_{xz}, τομή με τη σφαίρα κέντρου $(0,0,0)$



$$\bar\varphi(\theta,0) \xlongequal[(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)]{} r\begin{pmatrix}\sin\theta\\0\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

Στο Oxy:



Έχουμε $D\bar\Phi(\theta,\varphi) = r\left(\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\theta}, \frac{\partial\bar\Phi}{\partial\varphi}\right)(\theta,\varphi) =$

$$= r\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi\\ -\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

Άσκηση: Ο πίνακας έχει rank $=2$ εκτός από τα σημεία $\theta=0$, $\theta=\pi$.

$\Rightarrow \det(\ ) = 2\sin\theta\cos\theta =$
$= \sin(2\theta)\neq 0 \iff \theta\neq 0 \wedge \theta\neq\pi$

Ορισμός: $\bar{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$

(μόνο στον $\mathbb{R}^3$) $\bar{a}\times\bar{b} := (a_2b_3 - b_2a_3,\ a_3b_1 - b_3a_1,\ a_1b_2 - b_1a_2) \in \mathbb{R}^3$

$$= \begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$ όπου $\bar{e}_i$, $i=1,2,3$ τα διανύσματα βάσης του $\mathbb{R}^3$.

Το $\bar{a}\times\bar{b}$ λέγεται διανυσματικό γινόμενο των $\bar{a}, \bar{b}$.

Πρόταση: (α) $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$ (*) $\boxed{\bar{e}_1\times\bar{e}_2 = \bar{e}_3}$

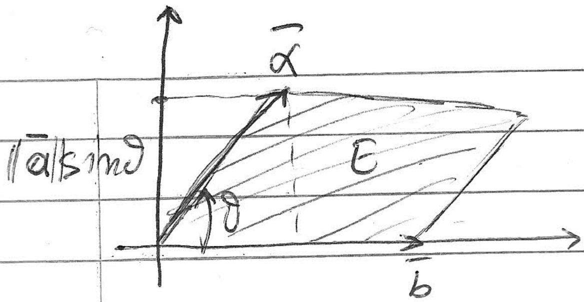
(β) $\bar{a}\times\bar{a} = 0$ (*)

(γ) $(\lambda\bar{a})\times\bar{b} = \bar{a}\times(\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a}\times\bar{b})$

Επίσης $\|\bar{a}\times\bar{b}\| = \|\bar{a}\|\|\bar{b}\||\sin\theta|$, $\theta = (\widehat{\bar{a},\bar{b}})$

(δ) $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\times\bar{b} + \bar{a}\times\bar{c}$

(ε) $\bar{a}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{b}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = 0$ (*)



$E = \|\bar{a} \times \bar{b}\|$, $\cos\theta = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|}$

Ορισμός: Έστω μια παραμετρική επιφάνεια $\bar{\Phi}$ με παραμετρικό πεδίο $K \subset \mathbb{R}^2$ και έστω $(u,v) \in K$. Τότε:

(α) το διάνυσμα $\bar{N}(u,v) = \dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(u,v)$ ονομάζεται κάθετο διάνυσμα της $\bar{\Phi}$ στο σημείο $\bar{\Phi}(u,v)$.

(β) Το σημείο $\bar{\Phi}(u,v)$ ονομάζεται κανονικό αν $\bar{N}(u,v) \neq \bar{0}$ ενώ ιδιάζον αν $\bar{N}(u,v) = \bar{0}$

(γ) Αν $\bar{\Phi}(u,v)$ είναι κανονικό, το διάνυσμα $\bar{n}(u,v) = \dfrac{\bar{N}(u,v)}{\|\bar{N}(u,v)\|}$ ονομάζεται μοναδιαίο κάθετο της $\bar{\Phi}$ στο $\bar{\Phi}(u,v)$

(δ) το επίπεδο $\left\{\bar{\Phi}(u,v) + \lambda \dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u}(u,v) + \mu \dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(u,v) : (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ λέγεται εφαπτόμενο επίπεδο της $\bar{\Phi}$ στο $\bar{\Phi}(u,v)$.

(*) ορίζεται επίπεδο διότι $\bar{N}(u,v) \neq \bar{0}$.